[Calculer A^{-1} si elle existe.

$$[A \,\vdots\, I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \; \cdots \; \longrightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right)}_{\text{FER de } [A \vdots I_3]}$$

OEL pour trouver FER

Dans ce cas, on a I_3 $\Longrightarrow$ A inversible

et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix}$ $\square$

Chapitre 6 : Déterminant

Déterminant des matrices 2x2

On rappelle que
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := a.d - c.b$$

Notation

On écrira $\det(\underbrace{\bar{v}_1, \bar{v}_2}_{\text{deux vecteurs de } \mathbb{R}^2}) := \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

Proposition 6.1

(BiL) $\det(\bar{v}_1+\lambda\bar{v}_1', \bar{v}_2) = \det(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + \lambda \det(\bar{v}_1', \bar{v}_2)$

$\det(\bar{v}_1, \bar{v}_2+\mu\bar{v}_2') = \det(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + \mu \det(\bar{v}_1, \bar{v}_2')$

$\forall \bar{v}_1, \bar{v}_1', \bar{v}_2, \bar{v}_2' \in \mathbb{R}^2$
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(ALT) $\det(\bar{v}, \bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^2$

(NOR) $\det(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 1$ où $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

(Preuve) <u>(BiL) première ligne</u> : $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, \bar{v}_1' = \begin{pmatrix}a'\\c'\end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$

$$\det\left(\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}a'\\c'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix}a+\lambda a'\\c+\lambda c'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\right) = (a+\lambda a')d - b(c+\lambda c')$$

$$= ad + \lambda a'd - bc - \lambda bc' = (ad-bc) + \lambda(a'd - bc')$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) + \lambda \det\left(\begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + \lambda \det(\bar{v}_1', \bar{v}_2). \square$$

Lemme 6.3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ application

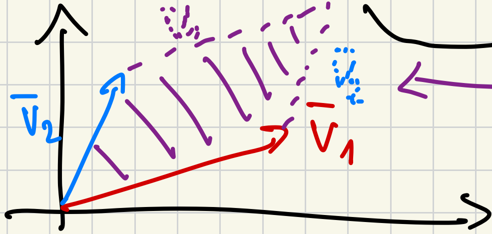
$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \longmapsto f(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$$

qui satisfait (BiL), (ALT) et (NoR). Alors

$$f(\bar{v}_1, \bar{v}_2) = \det(\bar{v}_1, \bar{v}_2), \quad \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^2$$

Thm. 6.4 Soient $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Aire de } P = |\det(\bar{v}_1, \bar{v}_2)|$$



parallélogramme P formé par $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$

Calcul $\det(\bar{v}_1, \bar{v}_2 + \lambda \bar{v}_1) \overset{(BiL)}{=} \det(\bar{v}_1, \bar{v}_2) + \lambda \underbrace{\det(\bar{v}_1, \bar{v}_1)}_{=0 \ (ALT)}$

(On le voit sur l'appl de Geogebra) $= \det(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$

Déterminant des matrices $n \times n$

Déf. 6.5 Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, on définit la sous-matrice principale $A[i|j]$ (pour $i, j \in [\![1, n]\!]$)

Comme la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue de A en éliminant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

Exemple 9.5*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Alors $A[3|1] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Déf 6.7 Soit $A \in \overbrace{M_{n\times n}(\mathbb{R})}^{\text{on écrit souvent } M_n(\mathbb{R})}$.

Alors on définit le déterminant de A via

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} A_{1,j} \cdot \underbrace{\det(A[1|j])}_{\text{déterminant d'une matrice } (n-1)\times(n-1)\,!}$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= A_{1,1}\det(A[1|1]) - A_{1,2}\det(A[1|2]) + \cdots + (-1)^{n+1} A_{1,n}\det(A[1|n])$$

⚠ C'est une définition par récurrence.

Exemple 6.10

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 + 0 = -1$$

THM 6.8

(i) $$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} \det(A[i|j])$$

(ii) $$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} A_{j,k} \det(A[j|k])$$

(i) ⟵ développement selon la ligne i

(ii) ⟵ ―――――――――――――――― colonne K

Exemple 6.10 (suite) $\det\begin{pmatrix}1&2&0\\3&5&0\\2&3&1\end{pmatrix}$

On utilise (ii) pour $K=3$:

$$\det\begin{pmatrix}1&2&0\\3&5&0\\2&3&1\end{pmatrix} = 0.\det\begin{pmatrix}3&5\\2&3\end{pmatrix} - 0.\det\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$$

$$+1.\det\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix} = -1 \qquad \square$$

Lemme 6.17 $\det(A) = \det(A^T)$

Proposition 6.18 (OEL.I) $L_i \longleftrightarrow L_j$

$$\det \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j,1} & \cdots & A_{j,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{j,1} & \cdots & A_{j,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

(OEL.II) $L_i \leftarrow \lambda . L_i \qquad (\lambda \neq 0)$

$$\underbrace{\text{résultat d'appliquer (OEL.II) sur } A} \xleftarrow[L_i \leftarrow \lambda L_i]{} \underbrace{A}$$

$$\det\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{i,1} & \cdots & \lambda A_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

(OEL$_i$ III) $\quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \quad (j \neq i)$

$$\det\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i,1}+\lambda A_{j,1} & \cdots & A_{i,n}+\lambda A_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i,1} & \cdots & A_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Exemple } 6.19^*}$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=}} \det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$